Universidad Nacional de Ingeniería P.A. 2014-2
Facultad de Ingeniería Mecánica 13/12/14
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

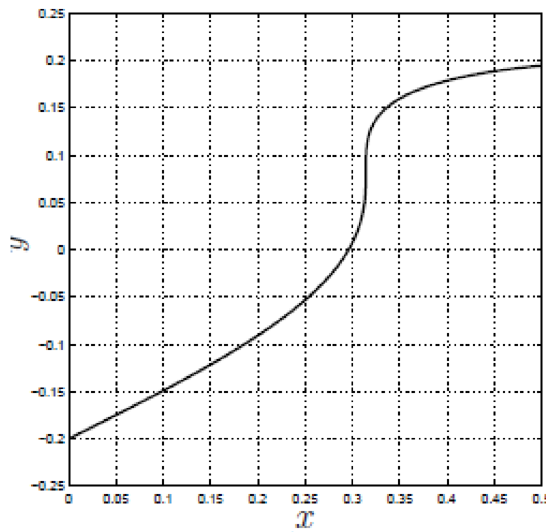
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Considere la curva en el espacio con ecuación paramétrica:

$$x(t) = 0.1\sin(t) + 0.1t$$
$$y(t) = 0.4\sin(0.25t) - 0.2$$

Se muestra en el diagrama de la derecha.



La longitud del arco de una curva en el espacio es conocido:

$$I = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, dt$$

Se quiere determinar la **<u>longitud del arco</u>** en el intervalo de tiempo [a=1, b=5], para lo cual se pide:

a) **(2.0p)** Aplicar la cuadratura cúbica de Newton cotes (Simpson 3/8), es decir cuatro puntos, para evaluar la longitud del arco.

b) **(2.0p)** Usando los mismos puntos que a) evalué la longitud del arco en forma aproximada mediante la regla compuesta del trapecio.

c) **(1.0p)** Crear una función en Matlab que evalué la función integrando, f, y la integral usando la regla compuesta del trapecio, T, para aproximar el arco de una curva en el tiempo [a b].
Use la siguiente cabecera: function [f,T]=integra (x,y, a, b,n).
%x, y: curvas paramétricas en t, forma simbólica.

Problema 2

Sea la ecuación diferencial de un oscilador armónico sin rozamiento forzado con un término oscilatorio: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_O^2 x = f_O sen(\omega t)$, siendo las condiciones de frontera x(0) = 0 y x(1) = -1/2, además $\omega_O = 5, \quad f_O = 20, \quad \omega = 1$:

a) (**1.5p**) Plantear las ecuaciones en diferencias finitas (h=0.25)
b) (**1.5p**) Resolver el sistema anterior
c) (**1.0p**) Evalúe el error relativo para x(0.5) si el valor exacto es 1.1492
d) **(1.0p)** Escriba los comandos MATLAB a fin de obtener la solución analítica y graficar la solución.

Universidad Nacional de Ingeniería — P.A. 2014-2
Facultad de Ingeniería Mecánica — 13/12/14
DACIBAHCC

Problema 3

Se sabe que la densidad del agua alcanza un máximo en la temperatura a una temperatura ligeramente superior a la de congelamiento. En la siguiente tabla, tomada de *Handbook of Chemistry and Physics* , se indica la densidad del agua en gramos por centímetro cúbico para cinco temperaturas con incrementos de -10^{o}C a 30^{o}C.

Temperatura (^{o}C)	**Densidad (g/cm^3)**
-10	0.99815
0	0.99987
10	0.99973
20	0.99823
30	0.99567

(1.5p) Completar la siguiente tabla de diferencias divididas

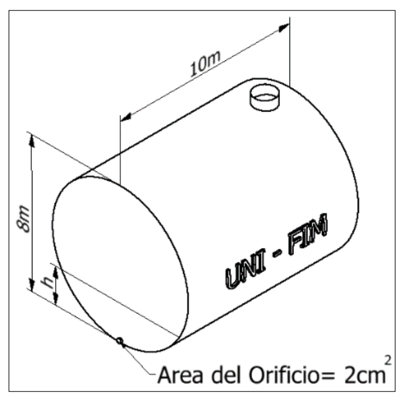
-10	0.99815	0.000172	--------------	--------------	-0.000000000833
0	0.99987	------------	-0.0000068	0.00000005	
10	0.99973	-0.00015	-0.0000053		
20	0.99823	-0.000256			
30	0.99567				

a) **(1.0p)** Hallar el polinomio interpolante
b) **(0.5p)** Aproximar la densidad del agua para una temperatura de ^{o}5C.
c) **(2.0p)** Implementar una función en MatLab que construya la tabla de diferencias divididas con la siguiente cabecera: **function D=TablaDifDiv(x,y)**

Problema 4

Un tanque horizontal llenado de agua al 50% de su capacidad, se descarga por un orificio ubicado en la parte inferior. Dada la configuración geométrica y física, la descarga está gobernada por el siguiente modelo matemático con todos los parámetros en unidades del SI.

$$\sqrt{\frac{8h - h^2}{h}}\,dh = -5.31x10^{-5}dt$$



a) **(2.0p)** Usando el método de Runge-Kutta de Orden 2, determine la altura del nivel del agua luego de 3 horas de iniciado la descarga, considere solo dos iteraciones para aproximar el resultado.
b) **(2.0p)** Usando el método de Euler progresivo, calcule el tiempo aproximado que sería necesario para descargarse hasta una altura de 2m, considere un paso de 6 horas para aproximar el resultado.
(1.0p) Desarrolle una función que permita calcular h a partir de t en horas, considerando un paso de 0.1 segundo y usando el método de Euler progresivo. Use la siguiente cabecera:

function h=calcularh(t)

Los Profesores

Solución 1

a)

$$x = 0{,}1\ \sin(t) + 0{,}1\,t$$
$$y = 0{,}4\ \sin(0{,}25\,t) - 0{,}2$$
$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0{,}1\ \cos(t) + 0{,}1$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0{,}1\ \cos(0{,}25\,t)$$
$$f(t) = \sqrt{(0{,}1\ \cos(t) + 0{,}1)^2 + 0{,}01\ \cos^2(0{,}25\,t)}$$

Nodos: h=(5-1)/3=4/3

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 2\frac{1}{3} & 3\frac{1}{3} & 5 \end{bmatrix}$$
$$f(1) = \sqrt{(0{,}1\ \cos(1) + 0{,}1)^2 + 0{,}01\ \cos^2(0{,}25)} = 0{,}182$$
$$f(2\frac{1}{3}) = \sqrt{\left(0{,}1\ \cos\left(2\frac{1}{3}\right) + 0{,}1\right)^2 + 0{,}01\cos^2\left(0{,}25\cdot 2\frac{1}{3}\right)} = 0{,}089$$
$$f(3\frac{2}{3}) = \sqrt{\left(0{,}1\ \cos\left(3\frac{2}{3}\right) + 0{,}1\right)^2 + 0{,}01\cos^2\left(0{,}25\cdot 3\frac{2}{3}\right)} = 0{,}0623$$
$$f(5) = \sqrt{(0{,}1\ \cos(5) + 0{,}1)^2 + 0{,}01\cos^2(0{,}25\cdot 5)} = 0{,}1322$$

Simpson (3/8):

$$I = \frac{1}{2}\left[f(1) + \quad 3f(2\tfrac{1}{3}) + \quad 3f(3\tfrac{1}{3}) + \quad f(5)\right] = 0{,}3841$$

b) Regla compuesta del Trapecio:

$$\mathrm{T} = h\ \left[\frac{1}{2}\,f_0 + f_1 + f_2 + \frac{1}{2}\,f_3\right] \qquad h = \frac{4}{3}$$
$$= 0{,}4112$$

c)

```
%syms t
%x=0.1*sin(t)+0.1*t;
%y=0.4*sin(0.25*t)-0.2;
function [f,T]=integra(x,y,a,b,n)
% x var. paramétrica en t
% y var. parametrica en t
syms t
f1=sqrt(diff(x)^2+diff(y)^2);
f=vectorize(inline(f1));
h=(b-a)/(n+1);
tt=a:h:b;
yy=f(tt);
T=trapz(tt,yy);
```

Solución 2

a)

$$\frac{x_2-2x_1+x_0}{h^2}+\omega_O^2 x_1 = f_O sen(\omega\, t_1)$$

$$\frac{x_3-2x_2+x_1}{h^2}+\omega_O^2 x_2 = f_O sen(\omega\, t_2)$$

$$\frac{x_4-2x_3+x_2}{h^2}+\omega_O^2 x_3 = f_O sen(\omega\, t_3)$$

$$\begin{bmatrix} -2+\omega_O^2 h^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2+\omega_O^2 h^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2+\omega_O^2 h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h^2 f_O sen(\omega\, t_1) \\ h^2 f_O sen(\omega\, t_2) \\ h^2 f_O sen(\omega\, t_3)+1/2 \end{bmatrix}$$

b) Reemplazando y resolviendo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.7240 \\ 1.0635 \\ -0.6595 \end{bmatrix}$$

c) Calculo del error

E=1.1492-1.0635=0.0857 (7.46%)

d) Código MATLAB

```
x = dsolve('D2x+5^2*x=20*sin(t)','x(0)=0','x(1)=-1/2','t')
tt=0:0.25:1
xx=subs(x,tt)
plot(tt,xx,'d'), grid
```

Solución 3

(a)

$$f[0,10]=\frac{f(10)-f(0)}{10}=\frac{0.99973-0.99987}{10}=\mathbf{-1.4\times 10^{-5}}$$

$$f[-10,0,10]=\frac{f[0,10]-f[-10,0]}{20}=\frac{\mathbf{-1.4\times 10^{-5}}-0.000172}{20}=\mathbf{-9.3\times 10^{-6}}$$

$$f[-10,0,10,20]=\frac{f[0,10,20]-f[-10,0,10]}{30}=\frac{0.0000068-(\mathbf{-9.3\times 10^{-6}})}{30}=\mathbf{8.3\times 10^{-8}}$$

(b)

$$P(x)=0.99815+1.72\times 10^{-4}(x+10)-9.3\times 10^{-6}(x+10)x+$$
$$+8.3\times 10^{-10}(x+10)x(x-10)-8.3\times 10^{-10}(x+10)x(x-10)(x-20)$$

(c)

P(5)= 0.99999656

(d)

```
function D=TablaDifDiv(x,y)
n=length(x);
D=zeros(n);
D(:,1)=y';
for j=2:n
   for i=1:n-j+1
      D(i,j)=(D(i,j-1)-D(i+1,j-1))/(x(i)-x(i+j-1));
   end
end
```

<u>Solución 4</u>

a)

$$h' = f(h,t) = \frac{-5.31x10^{-5}}{\sqrt{\frac{8h-h^2}{h}}}$$

h(0)=4 p(paso)=1.5*3600

Usando las siguientes fórmulas:

k1=p*f(h)

k2=p*f(h+k1)

h=h+(k1+k2)/2

T	K1	K2	h
1.5*3600	-0.1434	-0.1409	3.8579
3*3600	-0.1409	-0.1386	**3.7182**

Se alcanza una altura de 3.7182m

b) h(0)=4 p(paso)= 3600

Usando la siguiente fórmula:

h=h+p*f(h)

T	h
6*3600	3.42
12*3600	2.89
18*3600	2.38
24*3600	1.89

Se demora entre 18 a 24 horas aproximadamente, por interpolación lineal con los 2 ultimos puntos, T=22.65 horas

c)

```
function h=calcularh(t)
f=inline('(-5.31*10^-5)/(((8*y-y^2)/y)^0.5)','y')
h=4;p=0.1;
n=t*3600/p;
for i=1:n
  h=h+p*f(h);
end
```